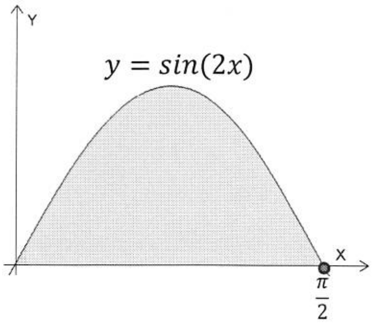
FACIT

Några uppgifter om rotationsvolymer

1. Till höger visas ett område vars area kan beskrivas med integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\, dx$$

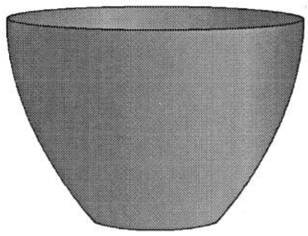
Beräkna volymen som fås då området roteras kring x-axeln.
Svara med 2 decimaler!



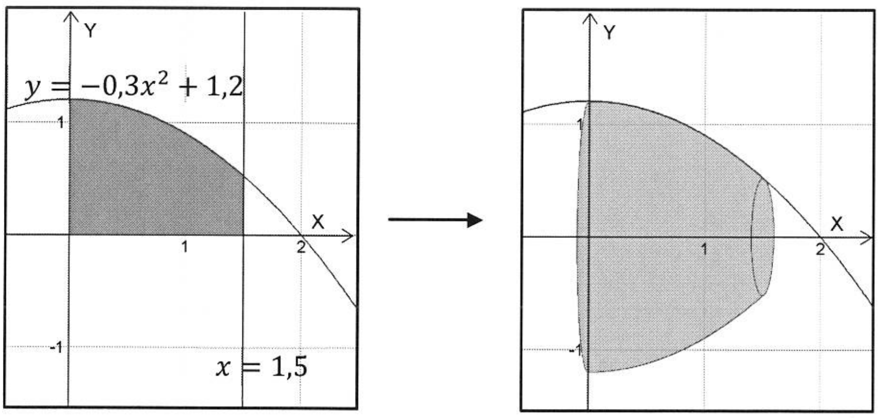
En cylinder: $dV = \pi \cdot y^2\, dx$

Volymen $= \int dV = \int_0^{\pi/2} \pi \cdot (\sin(2x))^2\, dx = [\text{fnInt}] \approx 2{,}47$ ve

2. En krukmakare har bestämt sig för att göra en kruka i form av en rotationskropp.



Krukans insida formas av att det område som innesluts av grafen till $y = -0{,}3x^2 + 1{,}2$, de positiva koordinataxlarna, samt linjen $x = 1{,}5$, roteras runt x-axeln.



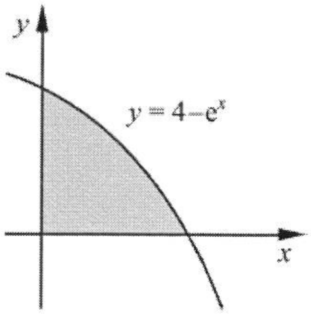
Utgå från att sträckorna i koordinatsystemet anges i dm.
Hur många liter kommer den färdiga krukan rymma?

$1\ dm^3 = 1\ l$

Volymen $= \int_0^{1,5} \pi \cdot (-0{,}3x^2 + 1{,}2)^2\, dx = [\text{fnInt}] \approx 4{,}67$ l

3. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften

I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror. (0/3/0)

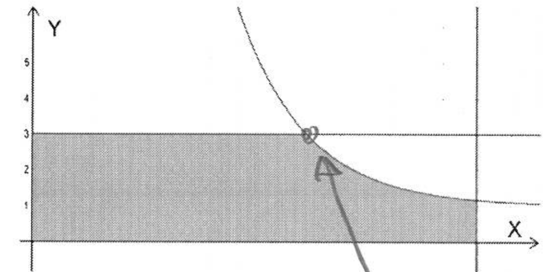
Nedre gränsen = 0. Övre gränsen fås med t.ex intersect: $x = 1,3862...$

Volymen ges av $\int_0^{1,386} \pi \cdot (4-e^x)^2 dx = [\text{FnInt}] \approx 17,846$

4. Uppgiften nedan är från ett gammalt Mattias-prov. Lös uppgiften.

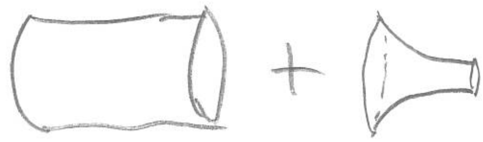
En tillverkare av drickfärdig juice vill skapa en ny flaska.
Som grund för detta används metoden med rotationsvolym kring x-axeln.

Med hjälp av funktionerna
$y_1 = 3$
$y_2 = 1 + 2e^{4-0,5x}$
koordinataxlarna, och linjen $x = 13$
innesluts ett område som skapar flaskans form enligt nedanstående figur
Alla mått är i cm.



$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$

V =



+

Hur många **liter** rymmer flaskan?

Intersect: $x = 8$

$= \pi \cdot 3^2 \cdot 8 + \int_8^{13} \pi \cdot y_2^2 dx$

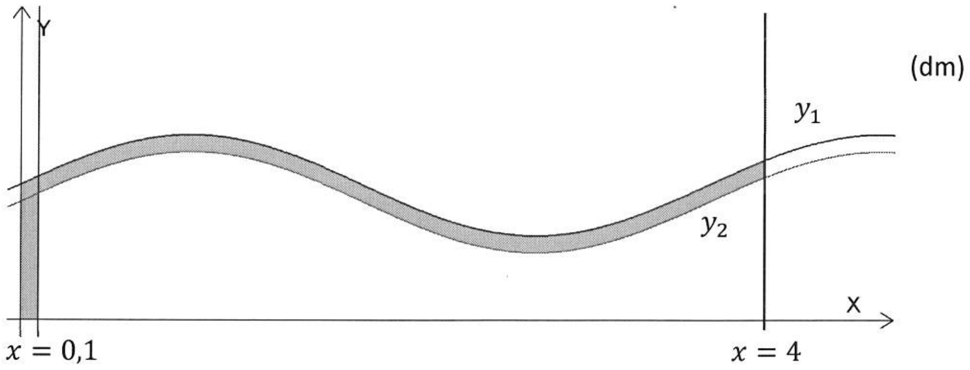
$= 226,2 + 51,3 = 277 \text{ ml}$

$= \underline{0,277 \text{ l}}$

5. En skulptör har designat en 4 dm hög blomvas i form av en rotationskropp.

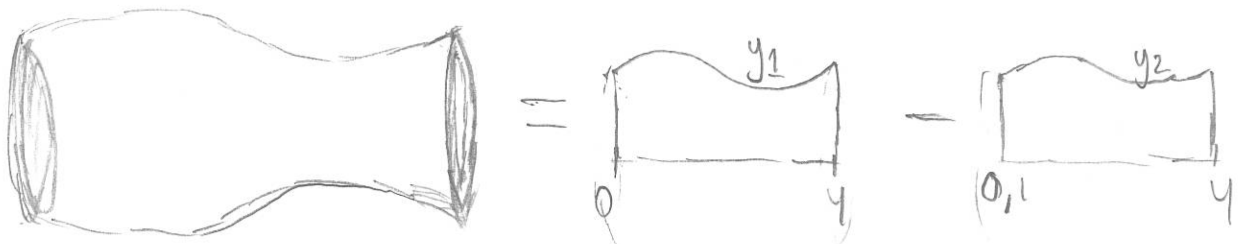
Som utgångspunkt används området nedan, som begränsas av:
y-axeln,
linjen $x = 0{,}1$,
grafen till $y_1 = 0{,}3\sin(1{,}7x) + 0{,}8$,
grafen till $y_2 = 0{,}3\sin(1{,}7x) + 0{,}7$,
och linjen $x = 4$

Vasen fås då området roteras runt x-axeln.



Hur mycket glasmassa går åt till att bygga vasen?

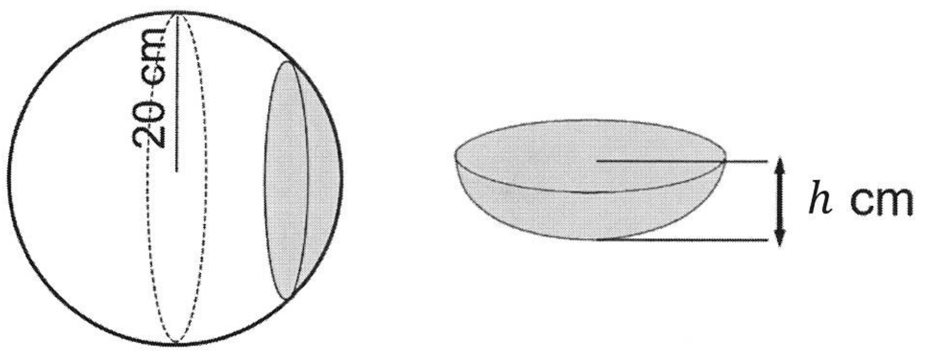
Vasen fås genom att ta två rotationsvolymer minus varandra:



$$= \int_0^4 \pi y_1^2 \, dx - \int_{0,1}^4 \pi y_2^2 \, dx$$

$$8{,}688 - 6{,}623 = \underline{2{,}065 \text{ dm}^3}$$

6. Nedanstående figur visar ett skålformat segment av ett klot med radien 20 cm.

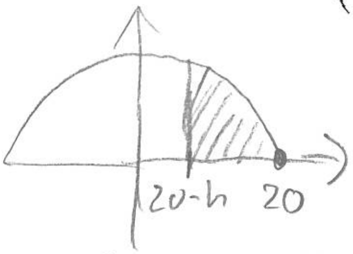


Visa med hjälp av att rotera delar av grafen av en halvcirkel kring x-axeln att volymen av klotsegmentet med höjden h ges av

$$V = \pi\left(400h + \frac{(20-h)^3}{3} - \frac{20^3}{3}\right)$$

En halvcirkel med $R = 20$:

$$y = \sqrt{20^2 - x^2}$$



$$V = \int_{20-h}^{20} \pi \cdot y^2\,dx = \int_{20-h}^{20} \pi \cdot (20^2 - x^2)\,dx =$$

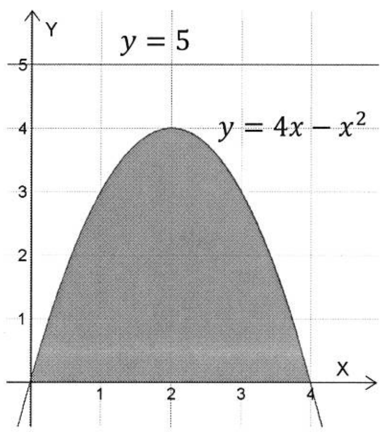
$$\left[\pi 20^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right]_{20-h}^{20} = \left(\pi 20^2 \cdot 20 - \frac{\pi \cdot 20^3}{3}\right) - \left(\pi 20^2 \cdot (20-h) - \frac{\pi(20-h)^3}{3}\right)$$

$$= \cancel{\pi \cdot 20^3} - \frac{\pi \cdot 20^3}{3} \cancel{- \pi 20^3} + \pi \cdot 20^2 \cdot h + \frac{\pi(20-h)^3}{3} = \pi\left(400h + \frac{(20-h)^3}{3} - \frac{20^3}{3}\right)$$

VSV.

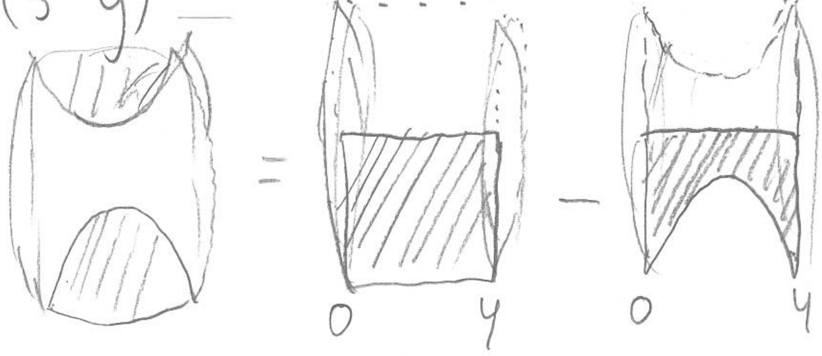
7. Figuren till höger visar det område som begränsas av grafen till funktionen $y = 4x - x^2$ och x-axeln.

Bestäm volymen av den rotationskropp som fås då området roterar kring linjen $y = 5$



OBS! Rotationen sker kring en annan linje än x-axeln $\Rightarrow$ radien blir

$r = (5 - y)$



$$= \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \int_0^4 \pi(5-y)^2\,dx$$

$$= 314{,}159 - 86{,}289$$

$$= 227{,}87 \text{ ve.}$$